Ex.7　解: 记矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. 再设

$$\begin{aligned}\beta_1 &= x_{11}\alpha_1+x_{21}\alpha_2+x_{31}\alpha_3,\\ \beta_2 &= x_{12}\alpha_1+x_{22}\alpha_2+x_{32}\alpha_3,\\ \beta_3 &= x_{13}\alpha_1+x_{23}\alpha_2+x_{33}\alpha_3.\end{aligned}$$

即矩阵方程$B=AX$, 其中$X=(x_{ij})_{3\times 3}$. 因为

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1+1+0-0-0-0=2\neq 0.$$

所以, 矩阵A 可逆, 于是, $X=A^{-1}B$, 即存在矩阵X 使得$B=AX$, 所以向量组β_1,β_2,β_3 可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

类似地, 由于

$$|B|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=1\neq 0.$$

所以, 矩阵B 可逆, 记$Y=B^{-1}A$, 则存在矩阵Y 使得$A=BY$, 所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由向量组β_1,β_2,β_3 线性表示.

由此可见, 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与向量组β_1,β_2,β_3 等阶.

练习一. 已知

$$(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}2&3\\0&-2\\-1&1\\3&-1\end{pmatrix},\quad(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}-5&4\\6&-4\\-5&3\\9&-5\end{pmatrix}.$$

证明向量组α_1,α_2 与向量组β_1,β_2 等阶.

练习二. 已知向量组

$$A:\ \alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\quad B:\ \beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix},$$

证明向量组A 与向量组B 等阶.

记住几个结论: (1) Page 103 练习13.

向量组A 与向量组B 等阶$\Leftrightarrow rank(A)=rank(B)=rank(A,B)$.

(2) 课件例题

向量组B 可由向量组A 线性表示且$rank(A)=rank(B)\Rightarrow$ 向量组A 与向量组B 等价.